

باسمه تعالی

سری اول تمرین‌های درس جبر خطی (تحویل: یکشنبه ۹۵/۱۱/۲۴)

۱- توجه: در حل بندهای این مسئله از تعریف اصلی دترمینان (بسط بر اساس سطر اول ماتریس) استفاده کرده و فرض کنید برابری $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ برای هر دو ماتریس مربعی و دلخواه A و B برقرار است.

الف) به کمک استقرا یا هر روش مناسب دیگر نشان دهید که دترمینان ماتریس واحد (یعنی ماتریسی که تمام عناصر واقع بر قطر اصلی آن برابر ۱ و عناصر غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر است)، برابر ۱ می‌باشد.

ب) به کمک استقرا یا هر روش مناسب دیگر نشان دهید که اگر ماتریس E از جابجایی دو سطر دلخواه از ماتریس واحد ایجاد شده باشد، دترمینان آن برابر ۱- خواهد بود.

پ) با استفاده از نتیجه‌ی بند ب نشان دهید هرگاه دو سطر دلخواه از یک ماتریس جابجا شوند، دترمینان ماتریس حاصل قریبه‌ی دترمینان ماتریس اول خواهد بود.

ت) فرض کنید F ماتریسی است که عناصر قطر اصلی آن همگی برابر ۱ بوده و تمامی عناصر دیگر آن به جز احياناً عناصر یک سطر دلخواه برابر صفر می‌باشند. به کمک استقرا یا هر روش مناسب دیگر نشان دهید که دترمینان این ماتریس برابر ۱ می‌باشد.

ث) با استفاده از نتیجه‌ی بند پ نشان دهید که اضافه کردن هر ترکیب خطی دلخواه از سطرهاى دیگر به یک سطر مشخص در هر ماتریس، تغییری در دترمینان ماتریس حاصل نسبت به ماتریس اول ایجاد نمی‌کند.

۲- هرگاه ماتریس‌های A, B, C و D ماتریس‌های مربعی $n \times n$ باشند، نشان دهید:

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} D & -C \\ -B & A \end{bmatrix}$$

۳- دترمینان ماتریس زیر را به دست آورید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

۴- ماتریس حقیقی $X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$ یک ماتریس $n \times n$ می‌باشد. در ساختار این ماتریس A یک ماتریس $k \times k$ و دارای وارون می‌باشد. در این صورت نشان دهید که

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1} B S^{-1} B^T A^{-1} & -A^{-1} B S^{-1} \\ -S^{-1} B^T A^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}$$

که در آن $S = C - B^T A^{-1} B$ ماتریس Schur Complement ماتریس A در X نامیده می‌شود (توجه کنید که فرض کرده‌ایم A و S دارای وارون می‌باشد).